# ВОПРОС О КРИВИЗНЕ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ В РАБОТАХ Л. ЭЙЛЕРА

Игнатушина Инесса Васильевна, к. ф.-м.н., доцент
ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет»
streleec@yndex.ru

*Аннотация:* В статье дается анализ работ Л. Эйлера по одному из ключевых вопросов дифференциальной геометрии – определение кривизны плоской кривой.

*Ключевые слова*: история дифференциальной геометрии плоских кривых, кривизна кривой, Леонард Эйлер.

# QUESTION ABOUT CURVATURE OF A PLANE CURVE IN THE WORKS OF L. EULER

Ignatuhhina Inessa Vasilievna,
PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
"Orenburg state pedagogical University"
streleec@yndex.ru

*Abstract*: The article analyzes the works of L. Euler's one of the key issues of differential geometry - the definition of the curvature of a plane curve.

*Key words*: differential geometry of plane curves, the curvature of the curve, Leonhard Euler.

В XVIII в. основополагающую роль в формирующейся дифференциальной геометрии сыграл Леонард Эйлер (1707–1783). В предлагаемой статье проанализируем его работы, в которых излагается вопрос об определении кривизны плоских кривых.

Во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748 г.) [1] Эйлер изложил учение о кривизне плоской линии. Прежде всего, исходную кривую $F(t,u)=0$ в окрестности некоторой ее точки он аппроксимирует алгебраической кривой:

$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \ldots$ (до $n-$степени включительно).

Затем он находит параболу $s^2 = \dfrac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E - ABD + B^2C} r$,

где $r = \dfrac{-At-Bu}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и $s = \dfrac{Bt-Au}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

которая в окрестности исследуемой точки «оскулирует» эту алгебраическую кривую, т.е. «не только касается ее, но и как бы сливается с ней». Следует отметить, что вершина найденной параболы совпадает с выбранной точкой на кривой.

Далее устанавливается, что радиус кривизны параболы $s^2 = br$ в ее вершине равен $\frac{1}{2}b$. Отсюда радиус кривизны исходной кривой в рассматриваемой точке равен $\dfrac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

Все точки кривой Эйлер разделил на три вида: 1) точки непрерывной кривизны [рис. 1], 2) точки перегиба [рис. 2], 3) точки заострения [рис. 3].

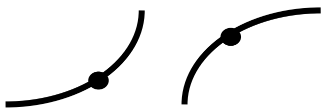

Рис. 1

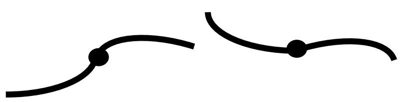

Рис. 2

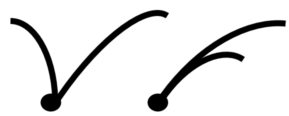

Рис. 3

Для определения вида точки он предлагает заменить алгебраическую кривую в окрестности этой точки параболой, уравнение которой имеет вид: $s^n = \alpha r^m$, тогда

1) если $m-$ нечетное, $n-$ четное, то исследуемая точка является точкой непрерывной кривизны (например, для параболы $s^2 = r$ начало координат – точка непрерывной кривизны [рис. 4]);

2) если $m-$ нечетное, $n-$ нечетное и $m \neq n$, то в точке наблюдается перегиб (например, для параболы $s^3 = r$ начало координат – точка перегиба [рис. 5]);

3) если $m$ – четное, $n$ – нечетное, то в точке кривая имеет заострение

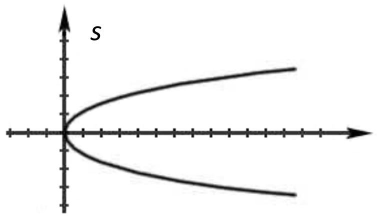


Рис. 4

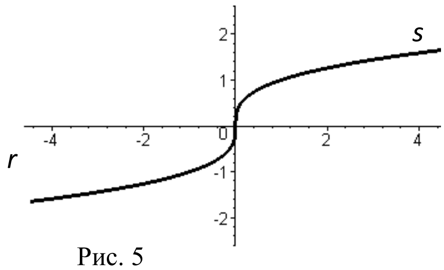


Рис. 5

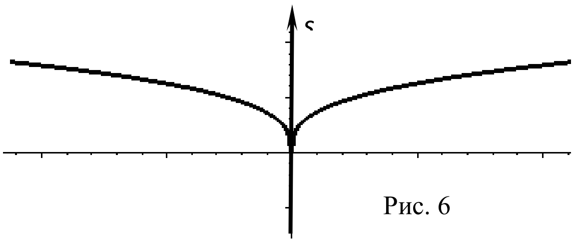

Рис. 6

(например, для параболы $s^3 = r^2$ начало координат – точка заострения [рис. 6]).

Случай, когда $m$ и $n$ – четные, сводится к одному из рассмотренных.

В мемуаре «Легкий способ нахождения радиуса кривизны из принципа максимума и минимума» (представленном 1789 г., но опубликованном в 1793 г.) [396] Эйлер показал подробный вывод формулы радиуса кривизны плоской кривой: $R = \dfrac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$ уже без обращения к «оскулирующей» параболе.

Рассмотрим ход его рассуждений. Кривая $AY$ [рис. 7] задана уравнением: $y = y(x)$, причем функция $y(x)$ дважды дифференцируема. Обозначим через $p$ ее первую производную, а через $q$ – ее вторую производную. Требуется определить радиус кривизны этой кривой в некоторой точке $Y(x; y)$.

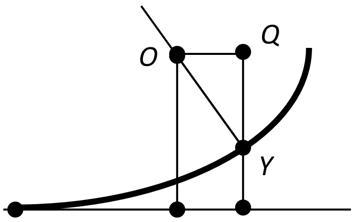


Рис. 7

Пусть соответствующий центр кривизны этой кривой находится в точке $O(f; g)$, тогда уравнение окружности кривизны имеет вид:

$$(x - f)^2 + (y - g)^2 = OY^2.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения и проведя несложные преобразования, получим $f = x + p(y - g)$. (*)

Если еще раз продифференцировать и сделать соответствующие замены, то будем иметь $g = y + \dfrac{1 + p^2}{q}$. Полученное подставим в равенство (*), тогда $f = x - p\dfrac{1 + p^2}{q}$.

Отсюда $OY^2 = \dfrac{p^2\left(1 + p^2\right)^2}{q^2} + \dfrac{\left(1 + p^2\right)^2}{q^2} = \dfrac{\left(1 + p^2\right)^3}{q^2}$, следовательно, $OY = \dfrac{\left(1 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{q} = \dfrac{\left(1 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dp}dx$.

Поскольку $1 + p^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{dx^2}$ и $dp = \dfrac{d^2ydx - d^2xdy}{dx^2}$, то радиус кривизны будет равен $OY = \dfrac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{d^2ydx - d^2xdy}$.

Предложенный Л.Эйлером способ нахождения радиуса кривизны плоской кривой в дальнейшем вошел во все учебные руководства по дифференциальной геометрии.

**Список литературы**

1. Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных. Т.2. [Текст]/ Л. Эйлер/ Пер. с лат. В.С. Гохмана. Ред. пер., вступ. ст. и прим. И. Б. Погребысского. – М.: Физматлит, 1961. – 390с.

2. Euler L. Methodus facilis investigandi radium osculi ex principio maximorum et minimorum petita [1793] / / Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. – Turici (Zurich), 1956. – Vol. 29. – S. 156–160.